Análisis Matemático I – Relación 1

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio vectorial normado. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de X podemos formar otra sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$. Dicha sucesión se representa por $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y se llama *serie de término general* a_n. Concretamente, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$, es la aplicación de $\mathbb{N}$ en X dada por $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las series son sucesiones por lo que es innecesario especificar lo que significa que una serie es convergente. El límite de una serie convergente $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ se llama *suma* de la serie y se representa por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de elementos de X. Prueba que si la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|a_n\|$ es convergente entonces también es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

2. Sea ℓ_∞ el espacio normado de las sucesiones acotadas de números reales con la norma uniforme, es decir, $\ell_\infty = (\mathcal{B}(\mathbb{N}), \|\ \|_\infty)$.

   a) Prueba que el subespacio c de las sucesiones convergentes es cerrado en ℓ_∞.

   b) Prueba que la aplicación $T : c \to \mathbb{R}$ dada por $T(\varphi) = \lim\{\varphi(n)\}$ es continua.

   c) Prueba que el subespacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero es cerrado en ℓ_∞.

3. Sea
$$\ell_1 = \left\{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(n)| < \infty\right\}.$$
   Para $\varphi \in \ell_1$ se define
$$\|\varphi\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(n)|$$
   a) Prueba que $(\ell_1, \|.\|_1)$ es un espacio de Banach.

   b) Sea δ_q la sucesión dada por $\delta_q(q) = 1$ y $\delta_q(n) = 0$ para $n \neq q$. Dada $\varphi \in \ell_1$ prueba que
$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\delta_n$$

Para entregar el miércoles 20 de noviembre.